

8/5/17

Σtereometria μετρώ $\mathbb{R}^3$
Επιμετρική μετρώ $\mathbb{R}^2$

Ισομετρίες

Ορισμός: Μία απεικόνιση $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n=2,3$)
καλείται ΙΣΟΜΕΤΡΙΑ $\Leftrightarrow$

$$d(f(p), f(q)) = d(p, q) \quad \forall p, q \in \mathbb{R}^n$$

Ερωτήματα: Να βρεθούν όλες οι ισομετρίες.

Γεωμετρική ισοσυμμία

Ορισμός: Δύο σχήματα Σ, Σ' (δηλαδή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$) καλούνται γεωμετρικώς ισοκύμα αν υπάρχει f ισομετρία του $\mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε $f(\Sigma) = \Sigma'$

Συμβολισμός: Το σύνολο των ισομετριών του $\mathbb{R}^n$ συμβολίζεται με $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)$

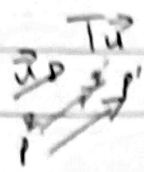
Παράδειγμα ισομετριών

1) $\text{Id} \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n)$, $\text{Id}(p) = p \quad \forall p \in \mathbb{R}^n$

2) Παράλληλες μεταφοές
 $\downarrow \quad \downarrow$

Έστω διάνυσμα $\vec{v}$, ορίζεται η παράλληλη

μεταφορά κατά $\vec{u}$ και η αντιστροφή

$$T_{\vec{u}}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, T_{\vec{u}}(p) = p'$$


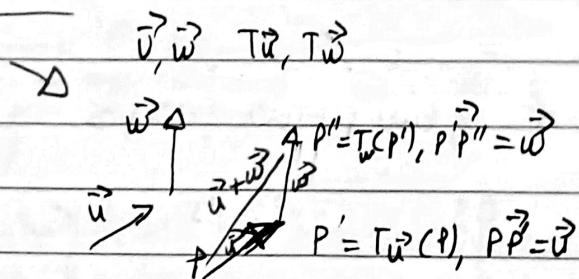
$$p' - p = \vec{u}$$

$$\Sigma' = T_{\vec{u}} \Sigma$$

$$q' - p' = \vec{u}$$

Συμπεράσματα: (για παραλ μεταφορές)

- i) κάθε $T_{\vec{u}} \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n)$
- ii) $T_{\vec{0}} = \text{Id}$
- iii) $T_{\vec{u}} \circ T_{\vec{w}} = T_{\vec{u}+\vec{w}} = T_{\vec{w}} \circ T_{\vec{u}}$



$$T_{\vec{u}+\vec{w}}(p) = p'' = T_{\vec{w}}(p') = T_{\vec{w}}(T_{\vec{u}}(p)) = T_{\vec{w}} \circ T_{\vec{u}}(p)$$

για iii) επιλέξω $\vec{w} = -\vec{u}$

$$T_{\vec{0}} \circ T_{-\vec{u}} = \text{Id} = T_{-\vec{u}} \circ T_{\vec{u}}$$

$T_{\vec{u}}$ αντιστρέφεται και $T_{\vec{u}}^{-1} = T_{-\vec{u}}$

$$f: A \rightarrow B \text{ αντιστρέφεται} \Leftrightarrow \exists g: B \rightarrow A \text{ } f \circ g = \text{Id}_B, g \circ f = \text{Id}_A$$

$\downarrow$
 $\downarrow$

iv) $T_{\vec{u}}$ αντιστρέφεται και $T_{\vec{u}}^{-1} = T_{-\vec{u}}$

Παρατήρηση: Αν $f \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n)$ τότε f είναι 1-1

Απόδειξη: $f(p) = f(q) \Rightarrow$

$$d(f(p), f(q)) = 0 \xRightarrow{\text{ισομετρία}}$$

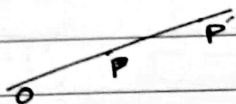
$$d(p, q) = 0 \Rightarrow \boxed{p = q}$$

Γεωμετρικός μετασχηματισμός

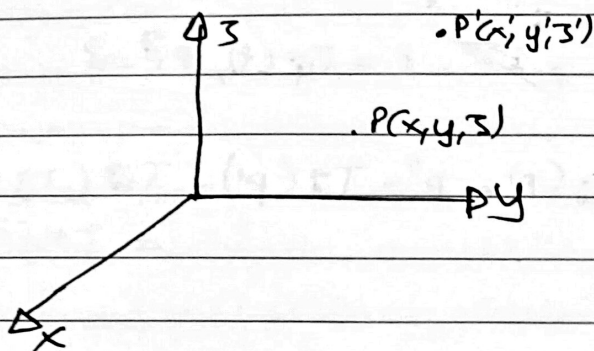
Ορισμός: Κάθε απεικόνιση f του χώρου (επίπεδο) στα εαυτά του καλείται γεωμετρικός μετασμός.

Παραδείγματα: γεωμ. μετ.

- 1) Παράλληλες μεταφορές.
- 2) Ομοθεσίες $\lambda \vec{O}, f_\lambda(P) = P'$
 $\vec{OP'} = \lambda \vec{OP}$



Έστω f Γενική Παρατήρηση
γεωμ. μετασχηματισμός του χώρου



$$\begin{cases} x' = \varphi_1(x, y, z) \\ y' = \varphi_2(x, y, z) \\ z' = \varphi_3(x, y, z) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = \varphi_1(x, y) \\ y' = \varphi_2(x, y) \end{cases}$$

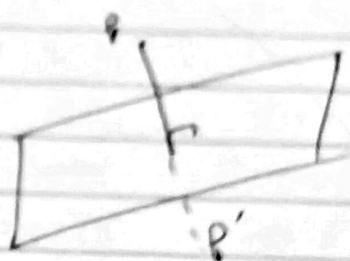
Κατόπτρισμός στο επίπεδο ως προς ευθεία ε .

$f(P) = P'$, P' = συμμετρικό του P ως προς την ε .

(Ο κατόπτρισμός είναι ισομετρία)

Κατόπτρις ως προς επίπεδο στο χώρο

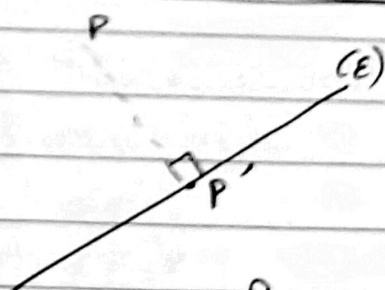
Δίνεται επίπεδο (π)



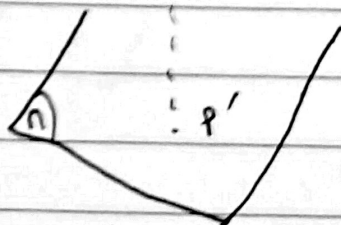
$f(P) = P'$ P' συμμετρικό του P ως προς το επίπεδο (π) .

Και άλλα παραδείγματα [γεωμ. μετ]

Προβολή σε ευθεία (ϵ) σε επίπεδο.



$f(P) = P' = \pi$ προβολή του P στην (ϵ) .



Οι προβολές δεν είναι 1-1
άρα δεν είναι ισομετρικές.

Στροφές στο επίπεδο

Δίνεται γωνία θ . Σε τυχόν σημείο P αντιστοιχίζω το P'

έτσι ώστε :

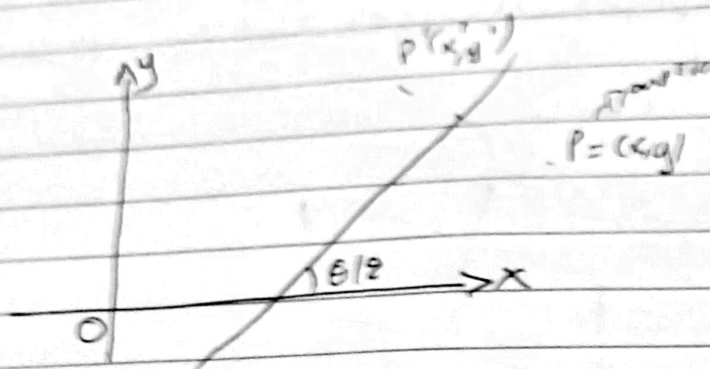
$$\begin{cases} |\vec{OP'}| = |\vec{OP}| \\ \text{και} \\ \angle(\vec{OP}, \vec{OP'}) = \theta \end{cases}$$

Οι στροφές είναι ισομετρικές.

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\theta \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\theta(P) = P'$$



$\mathbb{R}^2$ σημείο (x, y)

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \left(\begin{matrix} \text{σφασμ.} \\ R_{\theta} \circ R_{\theta} = R_{\theta+\theta} \end{matrix} \right)$$

Συνθεση

$K\theta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ καταστροφής

$$K\theta \circ K\varphi = \sigma_{\varphi+\theta}$$

π

Συνθεση δύο καταστροφών
είναι σφασμ.

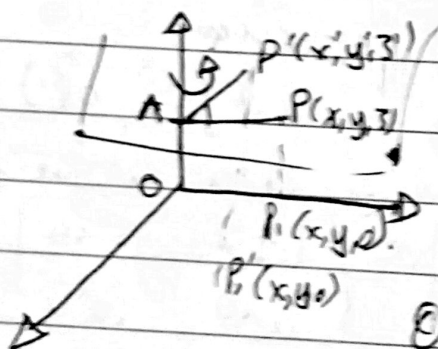
$K\varphi \circ R_{\varphi} = \text{identity}$

Στο χώρο (μετά $\mathbb{R}^3$).

1) Παράλληλες μεταφορές

2) Στροφές (ως προς άξονα).

Δίνεται ευθεία ℓ (άξονας).



$$P = (x, y, z) \rightarrow P' = (x', y', z') =$$

= σφασμ. τ.ω P κατά γωνία

θ γύρω από τον

άξονα ℓ $(\ell) = (O, \ell)$.

θ ευφω ευθεία $PA \perp O\ell$. Στροφή

το διάνυσμα AP κατά γωνία θ πάνω στο επίπεδο $(\eta) \perp OZ$ στο σημείο A . Το πέρας της σφαιρικής διαδρομής AP' είναι η σφαίρα του P κατά γωνία θ ως προς άξονα $(E) = (OZ)$.

$$Z' = Z.$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

σφαίρες κατά γωνία $\theta = \frac{1}{2} \pi \Rightarrow 1$ γύρω από τον OZ .

3) Ψευδοσφαίρες (ως προς άξονα).

Δίνεται άξονας (E) . και επίπεδο $(\eta) \perp (E)$. Επιλέγουμε σώμα συνεστραμμένο έτσι ώστε

$$(\eta) = Oxy$$

$$\text{και } (E) = OZ$$

Για τυχόν σημείο P , θεωρούμε την σφαίρα του P (x_1, y_1, z_1) κατά γωνία θ γύρω από τον άξονα OZ .

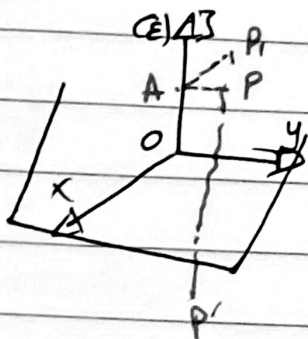
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

και στη συνέχεια θεωρούμε το κατεστραμμένο P' του P ως προς το επίπεδο $(\eta) = Oxy$

$$x' = x_1$$

$$y' = y_1$$

$$z' = -z_1$$



P-DP'

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ -z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\det = -1$$